Mec. Estatística (Gás ideal Quântico)

1. Considere um sistema hipotético constituído de **duas** partículas idênticas não-interagentes. Admita que cada uma delas pode ser encontrada em três estados distintos, especificados pelo número quântico $\sigma = 0, 1$ ou 2. A Hamiltoniana da **partícula** é $\mathcal{H} = \sigma(\sigma - 1)\varepsilon/2$, onde ε é uma constante com unidades de energia. O sistema está em contato com um reservatório térmico a uma temperatura T. Para as estatísticas de *Bose-Einstein* e *Fermi-Dirac*:

   a) Identifique os micro-estados acessíveis para **o sistema** e suas respectivas energias.

   b) Encontre a função de partição **canônica** do sistema.

   c) Considerando os micro-estados determinados no item *(a)*, calcule a probabilidade de cada um deles usando o ensemble canônico.

   d) Obtenha o número médio de ocupação dos três estados inviduais das partículas, ou seja, encontre $\langle n_\sigma \rangle$ para $\sigma = 0$, 1 e 2.

   e) Tomando uma **partícula** aleatoriamente, determine P_σ, ou seja, a probabilidade de encontrá-la num certo estado σ.

   f) Qual a probabilidade de encontramos o sistema com energia nula?

2. Considere um gás clássico de N moléculas diatômicas que não interagem entre si, em um recipiente de volume V e a uma temperatura T. Suponha que a Hamiltoniana de cada molécula é dada por:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_2^{\,2}\right) + \frac{1}{2}k\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2 ,$$

   onde $k > 0$ faz o papel de uma constante elástica. Determine a função de partição canônica de uma molécula e do sistema. Calcule a energia média do sistema e verifique se ela satisfaz ao teorema da equipartição de energia. Calcule o diâmetro molecular médio D, definido por $D^2 = \left\langle \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2 \right\rangle$, para essa moléculas.

3. Considere um gás de Fermi a temperatura nula. Descreva a ocupação dos estados individuais das partículas quando o gás se encontra neste estado. Explique o que é a energia de Fermi (ε_F) do gás degenerado e encontre ε_F em termos da densidade de partículas e de sua massa (admita que as partículas tem spin 1/2). Encontre a densidade de estados configuracionais das partículas com energia entre ε e $\varepsilon + d\varepsilon$. Obtenha uma estimativa para a contribuição dos elétrons de condução de um material de cobre para o calor específico do corpo a temperatura ambiente T. Compare com o resultado previsto pela estatística de Maxwell-Boltzmann.

4. Considere um gás ideal de bósons com N partículas ocupando um volume V. Explique o fenômeno de condensação de Bose-Einstein. Encontre a temperatura crítica da condensação em termos de N, V e da massa m dos bósons.