Exame de Qualificação - Eletromagnetismo

João Pessoa, 05 de julho de 2019

Nome:

I. QUESTÃO 1(20 PONTOS).

O campo elétrico a uma distância z, acima do centro de uma espira circular, de raio r, e densidade linear de carga λ, é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2\pi r \lambda z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{z}. \tag{1}$$

Considere, então, um disco circular plano, com raio R, que tem uma densidade superficial de carga uniforme, σ. Neste caso, use o resultado dado, relativo ao campo da espira, e calcule

((a) - 10 pontos) o campo elétrico a uma distância z, acima do centro do disco.

((b) - 5 pontos) A partir do resultado encontrado no item anterior, determine o campo elétrico, no caso em que o raio do disco é muito grande, o que matematicamente, pode ser expresso através da condição $R \to \infty$. Justifique, fisicamente, como este resultado poderia ser obtido, sem fazer nenhum cálculo, a partir de um resultado conhecido, para um caso particular.

((c) - 5 pontos) Considere pontos muito afastados do disco, ou seja, pontos para os quais a condição $z >> R$ é satisfeita. Calcule, então, o campo elétrico nestes pontos. Justifique, fisicamente, como este resultado poderia ser obtido, sem fazer nenhum cálculo, a partir de um resultado conhecido, para um caso particular.

II. QUESTÃO 2(20 PONTOS).

O fluxo do campo eletrostático, através de qualquer superfície fechada, é uma medida da quantidade de carga na região delimitada pela superfície. A cargas situadas na região exterior a superfície, não contribuem para o fluxo. Esta relação fluxo/carga é expressa através da lei de Gauss.

((a) - 5 pontos) Em que situações podemos aplicar a lei de Gauss de modo simples e direto? Justifique sua resposta.

Nos dois próximos itens, use, então, a lei de Gauss, para calcular o campo elétrico nas seguintes situações:

((b) - 7,5 pontoa) Em pontos dentro e fora de uma casca esférica, de raio R, que tem densidade superficial de carga uniforme σ.(1,0)

((c)- 7,5 pontos) Em pontos situados nas diferentes regiões entre dois planos infinitos e pararlelos, com densidades de carga uniformes, de mesmas magnitudes, porém de sinais opostos.

III. QUESTÃO 3(20 PONTOS)

Considere uma configuração formada por uma carga q, situada a uma distância d, de um plano condutor condutor infinito, localizado no plano xy, e mantido a um potencial zero.

O potencial elétrico, na região aonde está situada a carga q, pode ser obtido resolvendo-se a equação de Poisson, com condições de contorno apropriadas.

((a)- 5 pontos) Explicite essas condições e apresente uma justificativa para as mesmas.

O potencial também pode ser obtido, por outro procedimento, conhecido como método das imagens.

((b)- 5 pontos) Em que consiste esse método? Justifique a sua validade.

Use, então, o método das imagens, para calcular

((c)- 10 pontos) o potencial na região aonde a carga está situada e a carga superficial induzida.

IV. QUESTÃO 4(20 PONTOS)

Esta questão diz respeito ao campo magnético gerado por uma casca esférica, com uma carga distrubuída uniformemente na sua suprefície, com densidade σ, e em rotação, com velocidade angular ω, ao campo elétrico gerado, no caso em que a velocidadde angular depende do tempo e ao armazenamento de energia no campo magnético.

Admitindo-se que $\vec{\omega}$ coincide com o eixo z, o potencial vetor $\vec{A}$ é dado por:

$$\vec{A} = ar\sin\theta\vec{\phi}, r \leq R \tag{2}$$

e

$$\vec{A} = b\frac{\sin\theta}{r^2}\vec{\phi}, r \geq R, \tag{3}$$

onde $a = \frac{\mu_0 R\omega\sigma}{3}$ e $b = \frac{\mu_0 R^4\omega\sigma}{3}$, obtenha as expressões para

((a)- 10 pontos) o campo magnético dentro e fora da casca esférica.

((c)- 5 pontos) Suponha que $\omega = \omega(t)$ e obtenha a expressão para o vcampo elétrico induzido na suprefície da esfera, como uma função de θ.

(((c)- 5 pontos) Suponha, agora, que a velocidade angular é constante e obtenha as expressões para a energia armazenada no campo magnético.

V. QUESTÃO 5(20 PONTOS)

Esta questão refere-se a diferentes aspectos da aplicação das equações de Maxwell.

I) Considere que um fio longo e retilíneo, ao ser percorrido por uma corrente variável com o tempo, dá origem a uma campo elétrico dado por

$$\vec{E}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} sin(\omega t) ln(a/s)\vec{z}, \tag{4}$$

onde s é a distância ao fio e μ_0, I_0, ω, e a são constantes.

(((a)- 5 pontos)) Determine a corrente de deslocamento.

II) Um fio é percorrido por uma certa corrente de modo que o potencial vetor associado é constante e na direção do ângulo ϕ, em coordenadas cilíndricas.

((b) - 5 pontos) Determine a corrente que produziria esta configuração.

III) Considere uma configuração de campos, cujo módulo do campo elétrico é dado

$$E(\mathbf{r},t) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\Theta(vt - r), \tag{5}$$

e cuja direção é a radial, e o campo magnético é tal que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{6}$$

Verifique se esta configuração de campos satisfaz as seguintes leis:

((c) - 5 pontos) Lei de Gauss;

((d) - 5 pontos) Lei de Faraday;

VI. FÓRMULAS ÚTEIS:

Função degrau:

$$\Theta(x) = 1, \tag{7}$$

se $x > 0$

$$\Theta(x) = 0, \tag{8}$$

se $x \leq 0$.

Lei de Gauss

$$\int \mathbf{E}.d\mathbf{a} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}, \tag{9}$$

onde Q_{int} é a carga total na região delimitada pela superfície Gaussiana.

Carga superficial induzida:

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} \tag{10}$$

Carga total:

$$Q = \int \sigma da. \tag{11}$$

Energia armazenada no campo elétrico:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV. \tag{12}$$

Energia armazenada no campo magnético:

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int B^2 dV. \tag{13}$$

Campo gerado por um plano infinito com densidade supericial de carga σ:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}, \tag{14}$$

onde I_{int} é a corrente na região delimitada pelo circuito Amperiano.

Lei de Gauss

$$\nabla.\mathbf{E} = \frac{\mathbf{1}}{\epsilon_{\mathbf{0}}}\rho, \tag{15}$$

Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}}, \tag{16}$$