UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Mecânica Quântica (2017.1) - Exame de Qualificação

Estudante:

Primeira Questão: (3,0 pontos) Uma caixa contendo uma partícula está dividida entre dois compartimentos denominados de Direito, D, e Esquerdo, E, separados por uma partição muito fina. Se a partícula está certamente no lado direito (esquerdo), o estado é representado pelo auto-ket de posição $|D\rangle$ ($|E\rangle$), onde negligenciamos variações espaciais dentro de cada metade da caixa. O estado mais geral pode ser representado como

$$|\alpha\rangle = |D\rangle \langle D |\alpha\rangle + |E\rangle \langle E |\alpha\rangle ,$$

onde $\langle D |\alpha\rangle$ e $\langle E |\alpha\rangle$ são genericamente conhecidas como "funções de onda". A partícula pode tunelar através da partição; Este efeito de tunelamento é caracterizado pela hamiltoniana

$$H = \Delta \left(|E\rangle \langle D| + |D\rangle \langle E|\right),$$

onde Δ é um número real com dimensão de energia.

(i) Obtenha os auto-kets normalizados de energia. Calcule os correspondentes auto-valores de energia.

(ii) Na representação de Schrödinger, suponha que o sistema seja especificado por $|\alpha\rangle$ em $t = 0$. Encontre o estado para $t > 0$ aplicando o operador de evolução temporal apropriado.

(iii) Suponha que em $t = 0$ a partícula esteja certamente do lado direito. Obtenha a probabilidade de encontrar a partícula do lado esquerdo como função do tempo.

(iv) Escreva o sistema de equações de Schrödinger acopladas para as funções de onda $\langle D |\alpha, t_0 = 0; t\rangle$ e $\langle E |\alpha, t_0 = 0; t\rangle$. Mostre que as soluções do sistema de equações acopladas estão de acordo com o esperado no ítem (ii).

(v) Suponha que o teórico cometa um erro e escreva H como

$$H = \Delta |E\rangle \langle D| .$$

Resolva a evolução temporal deste hamiltoniano e mostre explicitamente a violação da conservação de probabilidade.

Segunda Questão: (2,0 pontos) (i) Prove que $1/\sqrt{2}(1+\sigma_1)$ atuando em um spinor de duas componentes pode representar matricialmente um operador de rotação no eixo x por $-\pi/2$; (ii) Construa uma representação matricial para S_3 quando os auto-kets de S_2 são usados como vetores da base.

Terceira Questão: (3,0 pontos) Seja $\psi(x,t)$ a solução da Equação de Schrödinger da partícula livre unidimensional com um comprimento de onda, λ, definido para um observador O em um sistema de coordenadas (x,t). Considere a mesma partícula descrita pela função de onda $\psi'(x',t')$ de acordo com o observador O' em um sistema de coordenadas (x',t') relacionado ao (x,t) mediante a transformação de Galileu $x' = x - vt,\ t' = t$.
(i) Mostre explicitamente se as funções $\psi(x,t)$ e $\psi'(x',t')$ descrevem ondas de mesmo comprimento de onda.
(ii) Qual a relaçõ entre $\psi(x,t)$ e $\psi'(x',t')$ se ambas satisfazem a Equação de Schrödinger nos seus respectivos sistemas de coordenadas?

Quarta Questão: (2,0 pontos) (i) Considere um sistema com momento angular $j = 1$. Escreva explicitamente

$$\langle j=1, m'|J_y|j=1, m\rangle$$

representado como uma matriz de ordem 3.
(ii) Mostre que, para j=1, é legítimo substituir $\exp(-iJ_y\beta/\hbar)$ por

$$1 - i\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)\text{sen}\beta - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2(1-\cos\beta)\,.$$

(iii) Usando o resultado do ítem (ii), obtenha a representação matricial de $d^{j=1}(\beta)$.

Algumas relações possivelmente úteis:

(i) Fórmula de Wigner:

$$
\begin{aligned}
d^{(j)}_{m'm}(\beta) \;=\; & \sum_k (-1)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(j-k-m')!(k-m+m')!} \times \\
& \times \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2j-2k+m-m'} \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2k-m+m'} \;;
\end{aligned}
$$

(ii) Relação de recursão dos coeficientes de Clebsch-Gordan:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j, m\pm 1\rangle &= \\
= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)}\,\langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2; j, m\rangle & \\
+\sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)}\,\langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; j, m\rangle &
\end{aligned}
$$