

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Mecânica Quântica (2023.1) - Exame Geral de Doutorado

Professor: Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos

Primeira Questão: (2,5 pontos) Um sistema quanto-mecânico possui dois autoestados de energia denotados por $|1\rangle$ e $|2\rangle$. O sistema também inclui três outros observáveis além da energia, denotados por P , Q e R . Os estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ são normalizados, mas não são necessariamente autoestados de P , Q e R .

Determine o maior número possível de autovalores de P , Q e R considerando os seguintes dados experimentais:

1. $\langle 1|P|1\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle 1|P^2|1\rangle = \frac{1}{4}$.
2. $\langle 1|Q|1\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle 1|Q^2|1\rangle = \frac{1}{6}$.
3. $\langle 1|R|1\rangle = 1$, $\langle 1|R^2|1\rangle = \frac{5}{4}$, $\langle 1|R^3|1\rangle = \frac{7}{4}$.

Segunda Questão: (2,5 pontos) Uma caixa contendo uma partícula é dividida em um compartimento direito e um compartimento esquerdo por uma fina divisória. Se a partícula conhecidamente está no lado direito (esquerdo) com certeza, o estado é representado pelo auto-estado de posição $|R\rangle$ ($|L\rangle$), onde negligenciamos variações espaciais dentro de cada metade da caixa. O vetor de estado mais geral pode ser escrito como

$$|\alpha\rangle = |R\rangle \langle R|\alpha\rangle + |L\rangle \langle L|\alpha\rangle,$$

onde $\langle R|\alpha\rangle$ e $\langle L|\alpha\rangle$ podem ser consideradas como "funções de onda". A partícula pode tunelar através da divisória; esse efeito de tunelamento é caracterizado pelo hamiltoniano

$$H = \Delta (|L\rangle \langle R| + |R\rangle \langle L|),$$

onde Δ é um número real com dimensão de energia.

(i) Encontre os autoestados normalizados de energia. Quais são os correspondentes autovalores de energia?

(ii) Na representação de Schrödinger, os estados base $|R\rangle$ e $|L\rangle$ são fixos, e o vetor de estado se move com o tempo. Suponha que o sistema seja representado por $|\alpha\rangle$ conforme dado acima em $t = 0$. Encontre o vetor de estado $|\alpha, t_0 = 0; t\rangle$ para $t > 0$ aplicando o operador de evolução temporal apropriado a $|\alpha\rangle$.

(iii) Suponha que em $t = 0$ a partícula esteja no lado direito com certeza. Qual é a probabilidade de observar a partícula no lado esquerdo em função do tempo?

(iv) Escreva as equações de Schrödinger acopladas para as funções de onda $\langle R|\alpha, t_0 = 0; t\rangle$ e $\langle L|\alpha, t_0 = 0; t\rangle$. Mostre que as soluções das equações de Schrödinger acopladas são exatamente o que você espera mediante o resultado de (ii).

(v) Suponha que a impressora tenha cometido um erro e escreveu H como

$$H = \Delta |L\rangle \langle R|.$$

Resolvendo explicitamente o problema de evolução temporal mais geral com o hamiltoniano errado, mostre que a conservação de probabilidade é violada.

Terceira Questão: (2,5 pontos) Considere a seguinte função de onda de duas partículas no espaço de posio:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = f(r_1^2)g(r_2^2) \left[\alpha(\vec{a} \cdot \vec{r}_1)(\vec{b} \cdot \vec{r}_2) + \beta(\vec{b} \cdot \vec{r}_1)(\vec{a} \cdot \vec{r}_2) + \gamma(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) \right],$$

onde \vec{a} e \vec{b} são vetores constantes, enquanto f e g são funções reais e α , β e γ são constantes.

(i) Quais são os autovalores do quadrado do momento angular total de cada partícula?

(ii) Qual escolha apropriada de α , β e γ permite que ψ seja também uma autofunção do quadrado do momento angular total? Nesse caso, quais são os valores possíveis desse novo observável compatível?

Quarta Questão: (2,5 pontos) A função de onda de uma partícula sujeita a um potencial esfericamente simétrico $V(r)$ é dada por

$$\Psi(\mathbf{x}) = (x + y + 3z)f(r).$$

- (i) Ψ seria uma autofunção de \mathbf{L}^2 ? Se sim, qual é o valor de l ? Se não, quais são os possíveis valores de l que podemos obter ao medir \mathbf{L}^2 ?
- (ii) Quais são as probabilidades de encontrar a partícula nos vários estados m_l ?
- (iii) Suponha que seja conhecido de alguma forma que $\Psi(\mathbf{x})$ é uma autofunção de energia com autovalor E . Indique como podemos encontrar $V(r)$.