UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Mecânica Quântica I - Exame Geral de Qualificação

Professor: Jorge Gabriel G. de S. Ramos

Primeira Questão: (2,5 pontos) Seja $\psi(x,t)$ a solução da Equação de Schrödinger da partícula livre unidimensional com um comprimento de onda, λ, definido para um observador O em um sistema de coordenadas (x,t). Considere a mesma partícula descrita pela função de onda $\psi'(x',t')$ de acordo com o observador O' em um sistema de coordenadas (x',t') relacionado ao (x,t) mediante a transformação de Galileu $x' = x - vt,\ t' = t$. (i) Mostre explicitamente se as funções $\psi(x,t)$ e $\psi'(x',t')$ descrevem ondas de mesmo comprimento de onda?
(ii) Qual a relação entre $\psi(x,t)$ e $\psi'(x',t')$ se ambas satisfazem a Equação de Schrödinger nos seus respectivos sistemas de coordenadas?

Segunda Questão: (2,5 pontos) (i) Calcule

$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle \equiv \left\langle S_x^2 \right\rangle - \left\langle S_x \right\rangle^2 ,$$

onde o valor esperado é tomado sobre um estado $S_z, +$. Usando o resultado obtido, verifique a validade da relação de incerteza generalizada entre os operadores S_x e S_y. Interprete fisicamente o resultado obtido.
(ii) Verifique a validade da relação de incerteza generalizada entre os operadores S_x e S_y para o estado $S_x, +$. Interprete fisicamente o resultado obtido.

Terceira Questão: (2,5 pontos) Considere uma partícula em três dimensões cujo hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}).$$

(i) Por meio do cálculo de $[\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}, H]$, obtenha

$$\frac{d}{dt}\left\langle \mathbf{x}\cdot\mathbf{p} \right\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right\rangle - \left\langle \mathbf{x}\cdot\nabla V \right\rangle .$$

(ii) Para a correspondência dessa relação com o análogo clássico do teorema virial é fundamental que o lado esquerdo da equação seja nulo. Especifique em que condições matemáticas e físicas isso acontece.

Quarta Questão: (2,5 pontos) Considere o operador momento angular $\mathbf{J}$ e um vetor $\vec{V}$ qualquer.
(i) Prove a propriedade

$$[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}\times\vec{V}] = 2i\hbar\left[\mathbf{J}^2\vec{V} - \left(\mathbf{J}\cdot\vec{V}\right)\mathbf{J}.\right]$$

(ii) Demonstre que

$$< j, m'|\vec{V}|j, m >= \frac{1}{\hbar^2 j(j+1)} < j, m'|(\mathbf{J}\cdot\vec{V})\mathbf{J}|j, m > .$$