Exame de qualificação 2024
MECÂNICA QUÂNTICA

1) [**3,5 pontos**] O operador Hamiltoniano associado ao movimento de uma partícula com carga elétrica e e massa μ, na presença de um campo magnético, é dado por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 \ .$$

Nesse sentido responda ao seguintes questionamentos:
a) Desenvolva a expressão para $\hat{H}$.
b) Considere que o potencial vetor seja dado por $\vec{A} = (0,\ B_0 x,\ 0)$, sendo B_0 constante. Encontre a expressão do campo magnético correspondente, e encontre a expressão para H nesse caso.
c) Admita que as auto-funções tenham a forma (*Ansatz*),

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{-i(Et - p_y y - p_z z)/\hbar} g(x) \ ,$$

onde E, p_y e p_z são, respectivamentes, os valores da energia e dos momentos lineares nas direções dos eixos y e z. Usando a equação de Schrodinger acima, encontre a equação diferencial obedecida por $g(x)$.
d) Definindo uma nova variável, $u = x - \frac{cp_y}{eB}$, reescreva a equação que voce obteve no item anterior em termos dessa variável. Você é capaz de relacionar a equação obtida a um sistema físico conhecido? Se sua resposta for positiva, forneça os valores para a energia.

2) [**3,5 pontos**] Um átomo de hidrogênio em seu estado fundamental, $1S$, é colocado entre as placas de um capacitor. Uma voltagem é aplicada ao capacitor, tal que um campo elétrico homogênio e dependente do tempo, $\vec{E} = E_0 e^{-t/\tau}\hat{z}$, com $\tau > 0$, é produzido a partir de $t = 0$. Usando teoria de perturbação dependente do tempo:
a) Encontre a probabilidade de transição para o nível $2S$ após um longo tempo.
b) Analise também a probabilidade para a transição para cada estado $2P$.
(Nota: Nas fórmulas abaixo, a_0 corresponde ao raio de Bohr.)

3) [**3 pontos**] Considerando apenas o grau de liberdade de spin, o operador Hamiltoniano associado a um elétron em uma rêde cristalina na presença de um campo magnético é expresso por:

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = \frac{e}{mc}\vec{S}\cdot\vec{B} \text{ com } \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \ ,$$

onde m representa a massa do elétron e e a sua carga. Admitindo que o campo magnético é $\vec{B} = B_1\hat{x} + B_2\hat{j}$, sendo B_1 e B_2 valores constantes, resolva a equação de Schrodinger,

$$H\Psi(t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(t)}{\partial_t} \ , \ \text{com} \ \ \Psi(t) = e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

e encontre:
a) Os possíveis valores da energia desse sistema.
b) As auto-funções normalizadas correspondentes.

Fórmulas uteis
Auto-funções, soluções do átomo de hidrogênio:

$$\begin{aligned}\Psi_{100}(\vec{r}) &= 2e^{-Zr/a_0}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} Y_0^0(\theta,\phi)\ ,\\ \Psi_{200}(\vec{r}) &= 2e^{-Zr/(2a_0)}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left(1-\frac{Zr}{2a_0}\right) Y_0^0(\theta,\phi)\ ,\\ \Psi_{21m}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-Zr/(2a_0)}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0} Y_1^m(\theta,\phi)\ .\end{aligned}$$

Auto-energia do átomo de hidrogênio:

$$E_n = -\frac{Z^2e^2}{2a_0n^2}\ .$$

Harmônicos Esféricos:

$$\begin{aligned}Y_0^0(\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\ ,\\ Y_1^1(\theta,\phi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}\ ,\\ Y_1^0(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\ ,\\ Y_1^{-1}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}\ .\end{aligned}$$

Integrais:

$$\int_0^\infty dx\ e^{-x/\alpha+i\beta x} = \frac{\alpha}{1-i\beta\alpha}\ .$$

$$\int_0^\infty dx\ x^n e^{-\alpha x} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}\ .$$

Matrizes de Pauli

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$