Exame de Qualificação de Mecânica Quântica

1) A função de onda associada a uma partícula que se move sob ação de um potencial central é,

$$\Psi(x,y,z) = C(xy + xz + yz)e^{-\alpha r} \ ,$$

onde α uma constante positiva, x, y, z e r são as variáveis espaciais, sendo $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Encontre, para esse estado:
a) A constante de normalização C.
b) Os valores esperados $< L_i >$, para $i = 1,\ 2,\ 3$, sendo L_i as componentes do operador momento angular orbital.
c) O operador de rotação em R^3 que atua nas funções de onda é definido por,

$$U_{\hat{n}}(\phi) = e^{-i\phi\frac{\hat{n}\cdot\vec{L}}{\hbar}} \ ,$$

onde $\hat{n}$ representa o versor ao longo do eixo no qual a rotação é realizada, ϕ representa o ângulo de rotação e $\vec{L}$ o operador momento angular orbital. Admitindo que $\hat{n} = \hat{z}$ e que o ângulo de rotação é muito pequeno, i.e., o ângulo é $\delta\phi$, infinitesimal, obtenha, em aproximação em primeira em ordem em $\delta\phi$, a expressão explicita da função de onda acima rotacionada.

2) Considere o movimento quântico unidimensional de uma partícula de massa μ sob ação de um potencial dado abaixo,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \ \ 0 < x < a \\ \infty & \text{para} \ x < 0 \ , \ x > a \ . \end{cases}$$

Admita que em um dado instante $t = 0$ o seu estado é descrito pela função de onda

$$\psi(x, t = 0) = Cx(x - a) \ ,$$

onde C é uma constante de normalização. Nessas condições forneça:
a) A probabilidade, P_n, de, em se efetuar uma medição na energia do sistema nesse estado, encontrarmos um dos possíveis valores de auto-energia do sistema, E_n.
b) A função de onda que representa a evolução temporal desse estado.

3) O operador Hamiltoniano associado a um elétron em uma rêde cristalina na presença de um campo magnético pode ser expresso por,

$$H = -\vec{M}_s \cdot \vec{B} = \frac{e}{\mu c}\vec{S}\cdot\vec{B} \ , \ \text{com} \ \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \ , \tag{1}$$

onde μ representa a massa desse elétron e e a sua carga elétrica. Admitindo que o campo magnético seja $\vec{B} = B_0\hat{z} + B_1\hat{x}$, onde B_0 e B_1 são uniformes, resolva a equação de Schrodinger,

$$H\Psi(t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} \ , \ \text{com} \ \Psi(t) = e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \ ,$$

e encontre:
a) Os possíveis valores da energia do elétron, $E = \hbar\omega$.
b) As auto-funções correspondentes normalizadas.

4) Considere o movimento quântico undimensional de uma partícula de massa μ submetida a ação de um potencial harmônico simples (OHS), cujo Hamiltoniano não-perturbado, H_0, é dado por,

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 \ ,$$

onde ω a frequência angular associada ao potencial. Admita que o sistema se encontrava em um estado caracterizado por um estado quântico n, $u_n^{(0)}(x)$, com energia,

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega\,(n + 1/2) \ , \text{ com } n = 0,\ 1,\ 2,\ ....$$

Uma perturbação $H_I = \lambda x$ é introduzida no sistema. Nesse contexto responda as questões abaixo:

a) Quais as correções na energia, adotando a teoria de perturbação independente do tempo, em primeira, $E_n^{(1)}$, e segunda, $E_n^{(2)}$, ordem, respectivamente.

b) Voce pode também encontrar o valor da nova energia de forma exata. Nesse caso, qual é o valor encontrado?

c) A fução de onda perturbada, $u_n(x)$, corrigida em primeira ordem. (Não é preciso escrever de forma explíicita a função $u_n^{(0)}(x)$)

5) Considere um sistema de dua partículas de spin-1/2, cujos operadores de spin são $\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$. Encontre os valores esperados de $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ e $S_z = S_{1z} + S_{2z}$ para cada estado do singleto e tripleto do operador $\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$.

Fórmulas úteis:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty dx\; x^n e^{-\beta x} &= \frac{n!}{\beta^{n+1}} \; . \\
J_\pm|j,m> &= \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1))}|j,m\pm 1> \; . \\
\int dx x^2 \sin(\lambda x) &= \frac{-\lambda^2 x^2\cos(\lambda x)+2\,\cos(\lambda x)+2\,\lambda\, x\sin(\lambda x)}{\lambda^3} \; . \\
\int dx x\sin(\lambda x) &= \frac{\sin(\lambda x)-x\cos(\lambda x)\,\lambda}{\lambda^2}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Para as auto-funções do OHS podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx u_n^*(x) x u_m(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\begin{cases} \sqrt{n+1} & \text{para } \; m=n+1 \\ \sqrt{n} & \text{para } \; m=n-1 \\ 0 & \text{para } \; m\neq m\pm 1 \; . \end{cases} \\
\alpha &= \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}
\end{aligned}
$$

$$Y_0^0(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_1^1(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}$$

$$Y_1^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^{-1}(\theta,\varphi)=+\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_2^2(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta e^{2i\varphi}$$

$$Y_2^1(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^{-1}(\theta,\varphi)=+\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_2^{-2}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta e^{-2i\varphi}$$
