Exame de Qualificação em Mecânica Quântica - 2019.2

2 de Dezembro de 2019

Questão 1 (4,0 pontos)

Considere dois estados de energia de um átomo: o fundamenta $|f\rangle$ e o excitado $|e\rangle$, com energias E_f e E_e, respectivamente. Imagine que este átomo está no tempo $t = 0$ no estado fundamental, e é submetido a uma radiação tal que o hamiltoniano de interação átomo-radiação é descrito pelo operador $\hat{H}_{int} = \hbar\Delta(|f\rangle\langle e| + |e\rangle\langle f|)$, sendo Δ uma constante real positiva. a) Escreva as matrizes do hamiltoniano do átomo isolado $\hat{H}_0$ e de $\hat{H}_{int}$ na base $\{|f\rangle, |e\rangle\}$, e encontre os autovalores e autokets de cada matriz. b) Considerando uma evolução temporal apenas com o hamiltoniano de interação $\hat{H}_{int}$ como gerador, encontre o tempo mais curto para o qual o átomo é encontrado no estado excitado com 100% de certeza, se é que isso é possível, quando uma medida da energia é realizada. c) Repita o item anterior para o caso em que apenas o hamiltoniano do átomo $\hat{H}_0$ gera a evolução. d) Em que situações físicas reais os casos dos dois itens anteriores representariam resultados satisfatórios? Discuta fisicamente todos os seus resultados.

Questão 2 (3,0 pontos)

Considere o estado de uma partícula de spin-1/2, $|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|S_x,+\rangle - i\sqrt{\frac{2}{3}}\,|S_x,-\rangle$. Calcule: a) o valor esperado e a variância da projeção do spin ao longo do eixo z; b) a probabilidade de medir este estado em $|S_{y,}-\rangle$. c) O estado $|\alpha\rangle$ é autoket do operador $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$? Justifique fisicamente.

Questão 3 (3,0 pontos)

Considere um oscilador harmônico quântico com frequência angular ω e massa m. Uma pequena perturbação $\hat{H}^{'} = b\hat{x}$ é aplicada, com b sendo uma constante real positiva. a) Calcule a primeira correção não nula para a energia desse sistema. b) Descreva uma situação física em que tal perturbação poderia ser implementada. c) Caso a perturbação fosse do tipo $\hat{H}^{'} = b\hat{x}^2$, a primeira correção não nula da energia forneceria um resultado satisfatório? Justifique.

Fórmulas:

Operador evolução temporal:

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right).$$

Matrizes de Pauli:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Oscilador Harmônico:

$$\hat{H}\,|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) = E_n\,|n\rangle\,;$$

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a};$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right);$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right);$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right);$$

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,;$$

$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,;$$

Teoria de perturbação:

$$E_n^{(1)} = \langle\psi_n^{(0)}|\hat{H}^{'}|\psi_n^{(0)}\rangle\,;$$

$$|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{m\neq n}\frac{\langle\psi_m^{(0)}|\hat{H}^{'}|\psi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}\,|\psi_m^{(0)}\rangle\,;$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{|\,\langle\psi_m^{(0)}|\hat{H}^{'}|\psi_n^{(0)}\rangle\,|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}};$$