UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Eletrodinâmica Clássica (2020.1) - Exame Geral de Qualificação

Primeira Questão: Um objeto macroscópico pode suportar um equilíbrio estático de cargas em seu interior. Um dos desdobramentos deste fato empírico é a geração de um campo eletrostático no espaço e, entre as primeiras formulações deste campo, podemos citar as que resultam da lei de Couloumb (LC) e da própria lei de Gauss (LG).
(i) Formule a LG e a LC explicitando a relevância do princípio da superposição e o significado físico do divergente. Explique qual das duas formulações é mais completa justificando detalhadamente a sua resposta.
(ii) A distribuição eletrostática uniforme de carga em um objeto macroscpíco pode ser descrita pela densidade volumétrica de carga ρ. Em particular, considere uma película retangular de espessura l finita em uma direção e infinita nas outras direções. Calcule a componente do campo elétrico na direção finita no interior da película **partindo da lei de Gauss em sua forma local.**
(iii) Execute o mesmo procedimento do ítem (ii) para calcular o campo elétrico no interior de um cilindro longo de raio R.
(iv) Explique o seguinte paradoxo: se a equação resultante da lei de Gauss na forma local é exatamente a mesma nos ítens (ii) e (iii), por quais razões os resultados são diferentes?

Segunda Questão: Dois dipolos elétricos rígidos $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ estão separados por uma distância r. Suponha que os dipolos estejam espacialmente fixos relativamente.
(i) Mostre que a força exercida por $\mathbf{p}_1$ em $\mathbf{p}_2$ pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3}{r^4}\left\{5\left[(\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2) - (\mathbf{p}_1\cdot\hat{r})(\mathbf{p}_2\cdot\hat{r})\right]\hat{r} + (\mathbf{p}_1\cdot\hat{r})\,\mathbf{p}_2 + (\mathbf{p}_2\cdot\hat{r})\,\mathbf{p}_1\right\},$$

onde $\hat{r}$ é o versor que liga $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$.
(ii) Considere um átomo esférico suportando uma polarizabilidade α situado a uma distância r muito grande de uma molécula polar cujo momento de dipolo permanente é p. Derive o termo principal para a magnitude da força intermolecular entre o par átomo-molécula em termos de α, p e r.
(iii) Considere dois átomos esféricos idêticos cada um com polarizabilidade α. Suponha que $p = p(t)$ seja o momento de dipolo instantâneo proveniente de uma flutuação temporal da densidade eletrônica em cada átomo. Estime a força interatômica média e compare os resultados com a interação de van der Waal.

Terceira Questão: Uma distribuição localizada de carga tem uma densidade especificada pela função

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{64\pi}r^2 e^{-r}\mathrm{sen}^2(\theta).$$

(i) Execute uma expansão multipolar do potencial devido a esta densidade de carga e determine todos os momentos multipolares não-nulos. Escreva o potencial para distâncias longas como uma expansão finita dos polinômios de Legendre.
(ii) Determine explicitamente o potencial em qualquer ponto do espaço e mostre que podemos aproximá-lo na origem até ordem de r^2 como

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120}P_2(\cos\theta)\right].$$

(iii) Se existe na origem um núcleo atômico com momento quadrupolar $Q = 10^{-28}\ m^2$, determine a magnitude da energia de interação. Assuma que a unidade de carga em $\rho(\mathbf{r})$ anterior seja atribuída à carga eletrônica e que a unidade de comprimento esteja em termos do raio de Bohr $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2 = 0,529\times10^{-10}\ m$. Expresse sua resposta em termos da frequência característica dividindo o resultado pela constante de Planck h. (A densidade de carga neste problema descreve os estados $m = \pm1$ do nível $2p$ do hidrogênio, enquanto a interação quadrupolar é da mesma ordem das obtida em moléculas.)