## 31.

# Gravitation und Elektrizität

Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
465—480 (1918)

Nach RIEMANN[1]) beruht die Geometrie auf den beiden folgenden Tatsachen:

1. *Der Raum ist ein dreidimensionales Kontinuum*, die Mannigfaltigkeit seiner Punkte lässt sich also in stetiger Weise durch die Wertsysteme dreier Koordinaten $x_1\, x_2\, x_3$ zur Darstellung bringen;

2. (*Pythagoreischer Lehrsatz*) das Quadrat des Abstandes $ds^2$ zweier unendlich benachbarter Punkte

$$P = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{und} \quad P' = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) \tag{1}$$

ist (bei Benutzung beliebiger Koordinaten) eine quadratische Form der relativen Koordinaten $dx_i$:

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad (g_{ki} = g_{ik}). \tag{2}$$

Die zweite Tatsache drücken wir kurz dadurch aus, dass wir sagen: der Raum ist ein *metrisches* Kontinuum. Ganz dem Geiste der modernen Nahewirkungsphysik gemäss setzen wir den Pythagoreischen Lehrsatz nur im Unendlichkleinen als streng gültig voraus.

Die spezielle Relativitätstheorie führte zu der Einsicht, dass *die Zeit* als vierte Koordinate $(x_0)$ gleichberechtigt zu den drei Raumkoordinaten hinzutritt, dass der Schauplatz des materiellen Geschehens, *die Welt*, also *ein vierdimensionales, metrisches Kontinuum* ist. Die quadratische Form (2), welche die Weltmetrik festlegt, ist dabei nicht positiv-definit wie im Falle der dreidimensionalen Raumgeometrie, sondern vom Trägheitsindex 3. Schon RIEMANN äusserte den Gedanken, dass sie als etwas physisch Reales zu betrachten sei, da sie sich z.B. in den Zentrifugalkräften als eine auf die Materie reale Wirkungen ausübende Potenz offenbart, und dass man demgemäss anzunehmen habe, die Materie wirke auch auf sie zurück; während bis dahin alle Geometer und Philosophen die Vorstellung gehabt hatten, dass die Metrik dem Raum an sich, unabhängig von dem materialen Gehalt, der ihn erfüllt, zukomme. Auf diesen Gedanken, zu dessen Durchführung RIEMANN durchaus noch die Möglichkeit fehlte, hat in unsern Tagen EINSTEIN (unabhängig von RIEMANN) das grandiose Gebäude seiner allgemeinen Relativitätstheorie errichtet. Nach EIN-

---

[1]) B. RIEMANN, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, Math. Werke, 2. Aufl. (Leipzig 1892), Nr. 13, S. 272.

STEIN kommen auch die Erscheinungen der *Gravitation* auf Rechnung der Weltmetrik, und die Gesetze, nach denen die Materie auf die Metrik einwirkt, sind keine andern als die Gravitationsgesetze; die $g_{ik}$ in (2) bilden die Komponenten des Gravitationspotentials. – Während so das Gravitationspotential aus einer invarianten *quadratischen* Differentialform besteht, werden *die elektromagnetischen Erscheinungen* von einem Viererpotential beherrscht, dessen Komponenten $\varphi_i$ sich zu einer invarianten *linearen* Differentialform $\Sigma\,\varphi_i\,dx_i$ zusammenfügen. Beide Erscheinungsgebiete, Gravitation und Elektrizität, stehen aber bisher völlig isoliert nebeneinander.

Aus neueren Darstellungen von LEVI-CIVITA[1]), HESSENBERG[2]) und des Verfassers[3]) geht mit voller Deutlichkeit hervor, dass einem naturgemässen Aufbau der Riemannschen Geometrie als Grundbegriff der der infinitesimalen Parallelverschiebung eines Vektors zugrunde zu legen ist. Sind $P$ und $P^*$ irgend zwei durch eine Kurve verbundene Punkte, so kann man einen in $P$ gegebenen Vektor parallel mit sich längs dieser Kurve von $P$ nach $P^*$ schieben. Diese Vektorübertragung von $P$ nach $P^*$ ist aber, allgemein zu reden, nicht integrabel, d.h. der Vektor in $P^*$, zu dem man gelangt, hängt ab von dem Wege, längs dessen die Verschiebung vollzogen wird. Integrabilität findet allein in der Euklidischen («gravitationslosen») Geometrie statt. – In der oben charakterisierten Riemannschen Geometrie hat sich nun ein letztes ferngeometrisches Element erhalten – soviel ich sehe, ohne jeden sachlichen Grund; nur die zufällige Entstehung dieser Geometrie aus der Flächentheorie scheint daran schuld zu sein. Die quadratische Form (2) ermöglicht es nämlich, nicht nur zwei Vektoren in demselben Punkte, sondern auch in irgend zwei voneinander entfernten Punkten ihrer Länge nach zu vergleichen. *Eine wahrhafte Nahe-Geometrie darf jedoch nur ein Prinzip der Übertragung einer Länge von einem Punkt zu einem unendlich benachbarten kennen*, und es ist dann von vornherein ebensowenig anzunehmen, dass das Problem der Längenübertragung von einem Punkte zu einem endlich entfernten integrabel ist, wie sich das Problem der Richtungsübertragung als integrabel herausgestellt hat. Indem man die erwähnte Inkonsequenz beseitigt, kommt eine Geometrie zustande, die überraschenderweise, auf die Welt angewendet, *nicht nur die Gravitationserscheinungen, sondern auch die des elektromagnetischen Feldes erklärt.* Beide entspringen nach der so entstehenden Theorie aus derselben Quelle, ja *im allgemeinen kann man Gravitation und Elektrizität gar nicht in willkürloser Weise voneinander trennen.* In dieser Theorie haben *alle physikalischen Grössen eine weltgeometrische Bedeutung; die Wirkungsgrösse insbesondere tritt in ihr von vornherein als reine Zahl auf. Sie führt zu einem im wesentlichen eindeutig bestimmten Weltgesetz; ja sie gestattet sogar in einem gewissen Sinne zu begreifen, warum die Welt vierdimensional ist.* – Ich will den Aufbau der korrigierten Riemannschen Geometrie hier zunächst ohne jeden physikalischen Hintergedanken skizzieren; die physikalische Anwendung ergibt sich dann von selber.

---

[1]) T. LEVI-CIVITA, *Nozione di parallelismo ...*, Rend. Circ. Mat. Palermo *42* (1917).

[2]) G. HESSENBERG, *Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie*, Math. Ann. *78* (1917).

[3]) H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie* (Berlin 1918), § 14.

In einem bestimmten Koordinatensystem sind die relativen Koordinaten $dx_i$ eines dem Punkte $P$ unendlich benachbarten Punktes $P'$ – siehe (1) – die Komponenten der *infinitesimalen Verschiebung* $\overrightarrow{PP'}$. Der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern drückt sich durch stetige Transformationsformeln aus:

$$x_i = x_i(x_1^* \, x_2^* \dots x_n^*) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

welche den Zusammenhang zwischen den Koordinaten desselben Punktes in dem einen und andern System festlegen. Zwischen den Komponenten $dx_i$ bzw. $dx_i^*$ derselben infinitesimalen Verschiebung des Punktes $P$ bestehen dann die linearen Transformationsformeln

$$dx_i = \sum_k \alpha_{ik} \, dx_k^*, \tag{3}$$

in denen $\alpha_{ik}$ die Werte der Ableitungen $\partial x_i / \partial x_k^*$ in dem Punkte $P$ sind. Ein (kontravarianter) *Vektor* $\mathfrak{x}$ im Punkte $P$ hat mit Bezug auf jedes Koordinatensystem gewisse $n$ Zahlen $\xi^i$ zu Komponenten, die sich beim Übergang zu einem andern Koordinatensystem genau in der gleichen Weise (3) transformieren wie die Komponenten einer infinitesimalen Verschiebung. Die Gesamtheit der Vektoren im Punkte $P$ bezeichne ich als den *Vektorraum* in $P$. Er ist 1. *linear oder affin*, d.h. durch Multiplikation eines Vektors in $P$ mit einer Zahl, und durch Addition zweier solcher Vektoren entsteht immer wieder ein Vektor in $P$, und 2. *metrisch*: durch die zu (2) gehörige symmetrische Bilinearform ist je zwei Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ mit den Komponenten $\xi^i$, $\eta^i$ in invarianter Weise ein skalares Produkt

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{x} = \sum_{ik} g_{ik} \xi^i \eta^k$$

zugeordnet. Nach unserer Auffassung *ist diese Form jedoch nur bis auf einen willkürlich bleibenden positiven Proportionalitätsfaktor bestimmt.* Wird die Mannigfaltigkeit der Raumpunkte durch Koordinaten $x_i$ dargestellt, so sind durch die Metrik im Punkte $P$ die $g_{ik}$ nur ihrem Verhältnis nach festgelegt. Auch physikalisch hat allein das Verhältnis der $g_{ik}$ eine unmittelbar anschauliche Bedeutung. Der Gleichung

$$\sum_{ik} g_{ik} \, dx_i \, dx_k = 0$$

genügen nämlich bei gegebenem Anfangspunkt $P$ diejenigen unendlich benachbarten Weltpunkte $P'$, in denen ein in $P$ aufgegebenes Lichtsignal eintrifft. Zum Zwecke der analytischen Darstellung haben wir 1. ein bestimmtes Koordinatensystem zu wählen und 2. in jedem Punkte $P$ den willkürlichen Proportionalitätsfaktor, mit welchem die $g_{ik}$ behaftet sind, festzulegen. Die auftretenden Formeln müssen dementsprechend eine doppelte Invarianzeigenschaft besitzen: 1. sie müssen *invariant* sein *gegenüber beliebigen stetigen Koordinatentransformationen,* 2. sie müssen ungeändert bleiben, *wenn man die* $g_{ik}$ *durch* $\lambda g_{ik}$ *ersetzt,* wo $\lambda$ eine willkürliche stetige Ortsfunktion ist. Das Hinzutreten dieser zweiten Invarianzeigenschaft ist für unsere Theorie charakteristisch.