

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Eletrodinâmica Clássica (2022.2) - Exame Geral de Qualificação

Primeira Questão: (2,5 pontos) Um meio biológico típico consiste de grandes macro-íons com carga $Q < 0$ flutuando em uma solução micro-íons pontuais com carga $q > 0$. Experimentos mostram que N micro-íons adsorvem sobre a superfície de cada macro-íon. Modele um macro-íon como uma esfera com sua carga uniformemente distribuída sobre sua superfície. Pode-se mostrar que a energia mínima da configuração com $N \gg 1$ cargas pontuais na superfície de uma esfera de raio R tem energia total

$$E(N) = q^2 / (8\pi\epsilon_0 R) (N^2 - N^{3/2}).$$

- (i) Derive o termo N^2 em $E(N)$ manchando a superfície do macro-íon com micro-íons distribuídos em sua superfície.
- (ii) Ofereça um argumento qualitativo para a dependência em $N^{3/2}$ no segundo termo de $E(N)$ usando o fato de que o primeiro termo não contempla as cargas que tentam evitar umas as outras na superfície da esfera.
- (iii) Obtenha N minimizando a soma de $E(N)$ com a energia de interação entre os micro-íons e os macro-íons. Mostre portanto que os micro-íons atuam para além da neutralização da carga do macro-íon

Segunda Questão: (2,5 pontos) (i) Prove o seguinte teorema: Para uma distribuição arbitrária de carga, $\rho(\mathbf{x})$, os valores dos $(2l + 1)$ momentos dos primeiros momentos multipolares não-nulos são independentes da origem dos eixos coordenados, mas os valores de todos os momentos mais altos dependem da escolha da origem.

(ii) Uma distribuição de carga possui momentos multipolares q , \mathbf{p} , Q_{ij} , etc, com respeito a um sistema de coordenadas e momentos q' , \mathbf{p}' , Q'_{ij} , etc, com respeito a um outro cujos eixos são paralelos ao primeiro, mas com a origem localizada no ponto $\vec{R} = (X, Y, Z)$ relativo ao primeiro. Determine explicitamente as conexões entre os monopolos, dipolos e quadropolos nos dois sistemas de eixos.

(iii) Se $q \neq 0$, poderíamos obter \mathbf{R} de modo que $\mathbf{p}' = 0$? Se $q = 0$, $\mathbf{p} \neq 0$, ou apenas $\mathbf{p} \neq 0$, poderíamos encontrar \mathbf{R} de modo que $Q'_{ij} = 0$?

Terceira Questão: (2,5 pontos) Considere duas esferas condutoras tendo raios r_1 e r_2 e cujos centros estejam separados por uma distância d grande quando comparada com seus raios. Suponha que a esfera 1 suporte uma distribuição uniforme de carga q_1 e que a esfera 2 suporte uma distribuição uniforme de carga $q_2 = q - q_1$.

(i) Negligenciando a perturbação causada por cada esfera no potencial criado pela outra, determine as condições para que a energia eletrostática U do sistema seja mínima e então escreva q_1 e q_2 em termos de q .

(ii) Repita o item (i) usando a dica seguinte e inclua o efeito de perturbação de cada esfera na outra

Dica: Tome o potencial de uma esfera distante como sendo o de uma carga pontual.

Quarta Questão: (2,5 pontos) Uma esfera de raio a suporta uma distribuição superficial uniforme de carga σ . A esfera gira com eixo em seu diâmetro e velocidade angular constante ω . Obtenha o potencial vetor e a densidade de fluxo magnético dentro e fora da esfera.